Exposé
Théorème de Poncelet

Bence Béky
dirigé par Frank Loray

8 janvier 2009

Résumé

On rappelle d'abord quelques concepts nécessaires pour nos investigations. Ensuite, on étudie les trajectoires de billiard dans une ellipse et prouve qu'ils consistent aux tangentes d'une conique homofocale. Enfin, on démontre le théorème de Poncelet sur ces tangentes.

1 Plans projectifs

Définition 1. *Soit $n \geqslant 2$ un entier. Considérons la relation binaire $\sim$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : a \sim b \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda a = b.$$

λ ne va jamais être zéro. Alors $\sim$ est réflexive (avec $\lambda = 1$), symétrique (si $\lambda a = b$, alors $\frac{1}{\lambda} b = a$) et transitive ($\lambda a = b, \nu b = c \implies \lambda \nu a = c$). Il s'agit donc d'une relation d'équivalence.

Le plan projectif réel $\mathbb{RP}^{n-1}$ est défini comme l'ensemble quotient

$$\mathbb{RP}^{n-1} := (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) / \sim .$$

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sa classe d'équivalence dans $\mathbb{RP}^{n-1}$ sera notée par $[x_1 : x_2 : \ldots : x_n]$.

Le plan projectif a la topologie quotient provenant de celle de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Par contre, il est facile de voir que sa structure de groupe n'est pas compatible avec la relation $\sim$: la somme des représentants des classes d'équivalence dépend sur le choix des représentants. Néanmois on peut considérer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$: chaque classe d'équivalence est entièrement contenue dans un telle sous-espace ou ils sont disjoints. Les images des sous-espaces de dimension k par la surjection canonique seront les sous-espaces de dimension $k-1$ du plan projectif : des droites projectives, des sous-plans projectifs etc.

Considérons le plan euclidien. Le parallélisme des droites est une relation d'équivalence. Identifions un point *idéal* a chaque classe d'équivalence et disons que chaque droite contient le point idéal appartenant à sa classe d'équivalence en plus de ses points habituels, appelent points finis. Ce point idéal peut être imaginé comme un point qui se trouve à l'infini à la direction dirigée par les droites – en fait, aux deux directions opposées à la même fois.

Disons aussi que les points idéals forment une droite idéale. Pour la structure des points finis et idéals avec des droites habituelles et idéale, on a que chaque deux droites s'entrecroisent à un point unique : deux droites habituelles peuvent s'entrecroiser à un point fini ou être parallèle, en ce cas elles se rancontrent au point idéal appartenant à leur classe. Une droite habituelle et la droite idéale s'entrecroisent au point idéal qui appartient à la droite habituelle.

Aussi, pour chaque deux points il y a une droite unique qui les contient : deux points finis peuvent être connectés par une droite habituelle. Un point fini et un point idéal sont contenus par la droite sur le point fini dans la classe d'équivalence qui appartient au point idéal. Deux points idéals sont contenus par la droite idéale.

Cette extension du plan euclidien est donc isomorphe à $\mathbb{RP}^2$.

Il y a un autre représentation de $\mathbb{RP}^2$: chosissons les deux représentant avec module 1 de chaque classe d'équivalence de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ pour obtenir la surface d'une sphère. Les points qui se trouvent aux deux terminaisons d'un diamètre sont identifiés et correspondent au même point sur le plan projectif. Les droites sont représentées par les grands cercles. Voilà on peut voir que en fait il n'y a pas de différence entre les points finis et idéals, entre des droites finies et idéale. En ce sens, $\mathbb{RP}^2$ est isotrophe. Un projection du centre de la sphère sur un plan qui ne le contient pas nous donne une bijection entre les deux représentations. Le grand cercle parallèle au plan correspond à la droite idéale.

Définition 2. *Le plan projectif complexe $\mathbb{CP}^{n-1}$ est défini de la même façon, comme l'ensemble quotient de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $\sim$ étendue sur les complexes :*

$$\forall a, b \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} : a \sim b \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} : \lambda a = b$$

avec la topologie quotient provenant de celle de $\mathbb{C}^n$ et les sous-espaces projectifs provenant des sous-espaces de $\mathbb{C}^n$.

Considérons $\mathbb{CP}^1 = [1:0] \cup \{[z:1] | z \in \mathbb{C}\}$. On peut assigner $[z:1]$ a chaque point z du plan complexe et ajouter $[1:0]$, le point *à l'infini*. Par l'inversion

$$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$$

le point à l'infini est transformé à l'origine, l'origine $[0:1]$ est transformée à l'infini, les points sur le cercle unité sont conservés, et son intérieur et extérieur sont échangés. On obtient une représentation des points de $\mathbb{CP}^1$ sauf $[0:1]$ par le plan complexe. Ces deux représentations sont, en fait, des *cartes* de la sphère de Riemann.

2 Courbes

Comme les points projectivs sont les classes d'équivalence d'un espace vectoriel par multiplication par un scalaire, les équations des sous-ensemble sont forcément homogènes. Par exemple, sur $\mathbb{RP}^2$, les droites peuvent être déterminé comme

$$\{[x_1 : x_2 : x_3] : x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0\}$$

avec y_1, y_2, y_3 fixé. Remarquons que $\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda y_3$ déterminent la même droite. En fait, les points et les droites forment des structures isomorphes. Échangant "point" et "droite", "le point d'intersection de deux droites" et "la droite sur deux points" dans un théorème va donner un autre théorème. C'est appelé le principe de *dualité*.

Les courbes de degré plus haute sont définis la même façon. Par exemple, une cubique dans $\mathbb{CP}^2$:

$$\left\{ [x_1 : x_2 : x_3] : \sum_{\substack{i+j+k=3 \\ i,j,k \in \mathbb{N}}} a_{ijk} \cdot x_1^i x_2^j x_3^k = 0 \right\}$$

avec 10 coefficients a_{ijk}.

En fait, il y a une correspondance très importante entre les cubiques et les courbes elliptiques. Chaque cubique sur $\mathbb{CP}^2$ peut être transformé par un automorphism de $\mathbb{CP}^2$ (une transformation de la groupe $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$) à la forme

$$E = \{[1 : x : y] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} | y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)\} \cup \{[0, 0, 1]\}.$$

Aussi, $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}$ caractérise la cubique.

3 Tores

Considérons un réseau $\Lambda = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ avec $a, b \in \mathbb{C}, a, b \neq 0, \frac{a}{b} \notin \mathbb{R}$. Alors on peut définer la rélation d'équivalence

$$\forall x, y \in \mathbb{C} : x \equiv y \pmod{\Gamma} \iff (x - y) \in \Gamma$$

et étudier la structure $T = \mathbb{C}/\Lambda$. T est appelé un *tore* et comme l'addition des complexes est compatible avec la relation $\equiv$, T hérite l'addition, un operation binaire.

On va utiliser le fait que chaque cubique est isomorphe à un tore complexe.

4 Billard

Considérons une bille qui rebondit dans une ellipse E_0. On s'intéresse à la question si la trajectoire est periodique. On démontre d'abord que si une corde n'intersecte pas le segment qui connecte les deux foyers, alors toute corde est tangente à la même ellipse homofocale. Dans la prochaine section on va voir que si on fixe une ellipse homofocale, alors la périodicité ne dépend pas du point initial sur E_0.

Pour une telle corde, il existe une ellipse unique à laquelle elle est tangente, l'appellons E_c. C'est assez de démontrer que après la réflexion, la bille va tangenter la même ellipse. On sait que la bissectrice des cordes le long desquelles la bille avance avant et après la réflexion est perpendiculaire à la tangente à E_0 dans le point d'incidence.

Théorème 3. *Soit F_1, F_2 les deux foyers des ellipses E_0 et E_c en commune. Soit $X \in E_0$, $Y_1, Y_2 \in E_c$, $Y_1 \neq Y_2$ avec XY_1 et XY_2 tangentes à E_c. Alors la bissectrice de $Y_1XY_2\measuredangle$ est perpendiculaire à la tangente de E_0 à X ; la bille arrivant à X le long de Y_1X va rebondir à la direction de XY_2.*

On va utiliser plusieurs fois le fait qu'une tangente à une ellipse est perpendiculaire à la bissectrice des segments qui connectent le point de tangence aux deux foyers.

Démonstration. Sachant que la bissectrice d'angle $F_1XF_2\measuredangle$ est perpendiculaire à la tangente de E_0 à X, c'est assez à montrer qu'elle coïncide avec la bissectrice d'angle $Y_1XY_2\measuredangle$.

Soit F_2' l'image de F_2 réflechi par rapport à l'axe XY_1 et F_2'' l'image de F_2 réflechi par rapport à l'axe XY_2. $Y_1 \in \overline{F_1F_2'}$ et $Y_2 \in \overline{F_1F_2''}$ parce que XY_1 comme tangente est perpendiculaire à la bissectrice de $F_1Y_1F_2\measuredangle$ et XY_2 est perpendiculaire à la bissectrice de $F_2Y_2F_1\measuredangle$. Faites appel à figure 1.

$XF_2' = XF_2''$ et $F_1F_2' = F_1Y_1 + Y_1F_2 = F_1Y_2 + F_2Y_2 = F_2F_2''$. Alors on a $XF_1F_2'\triangle \simeq XF_1F_2''\triangle$, qui implique

$$F_2'XF_1\measuredangle = F_1XF_2''\measuredangle = \frac{F_2'XF_2''\measuredangle}{2}.$$

Par la réflexion, on a

$$F_2'XY_1\measuredangle = Y_1XF_2\measuredangle = \frac{F_2'XF_2\measuredangle}{2}$$

et aussi

$$F_2XY_2\measuredangle = Y_2XF_2''\measuredangle = \frac{F_2XF_2''\measuredangle}{2}.$$

Et voilà

$$F_2XY_2\measuredangle = \frac{F_2XF_2''\measuredangle}{2} = \frac{F_2'XF_2''\measuredangle - F_2'XF_2\measuredangle}{2} = F_2'XF_1\measuredangle - F_2'XY_1\measuredangle = Y_1XF_1\measuredangle$$

qui implique que la bissectrice de l'angle $Y_1XY_2\measuredangle$ coïncide avec laquelle de l'angle $F_1XF_2\measuredangle$.

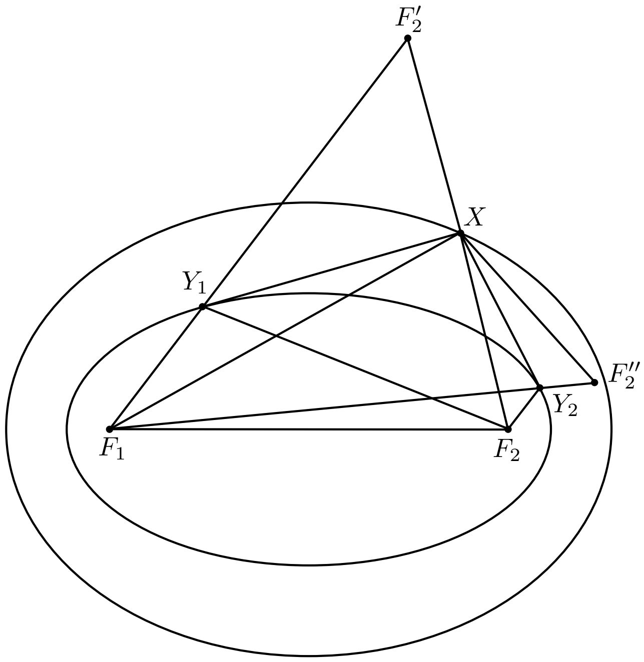

FIGURE 1 – E_0 et E_c avec deux tangentes et des points auxiliaries pour la démonstration.

□

5 Théorème de Poncelet

Théorème 4. *Soit $E_0, E_c \in \mathbb{R}^2$ deux ellipses homofocales, E_c dans E_0. Choisissons un point $x_0 \in \mathbb{E}_0$. Alors il existe deux cordes issues de x_0 qui sont tangentes à E_c, soit x_1 la limite d'une. Pour tout $n = 2, 3, \ldots$, il existe un point x_n unique sur E_0 telle que $x_{n-1}x_n$ est une corde tangente à E_c et $x_n \neq x_{n-2}$. Soit $p = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : x_n = x_0\}$. Alors p ne dépend pas de x_0.*

Démonstration. Soient a le demi-grand axe et b le demi-petit axe de E_0. On peut choisir le système de coordonnées telle que les foyers soient $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$:

$$E_0 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Ensuite on peut trouver $0 < c < b$ telle que

$$E_c = \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y_1^2}{a^2 - c^2} + \frac{y_2^2}{b^2 - c^2} = 1 \right\}.$$

Définissons

$$\begin{aligned} E_0^{\mathbb{C}} &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \right\}, \\ E_c^{\mathbb{C}} &= \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2 : \frac{y_1^2}{a^2 - c^2} + \frac{y_2^2}{b^2 - c^2} = 1 \right\} \end{aligned}$$

les extensions complexes des ellipses E_0 et E_c, respectivement. Considérons les fonctions $\mathbb{CP}^1 \to E_0^{\mathbb{C}}$ et $\mathbb{CP}^1 \to E_c^{\mathbb{C}}$ suivantes :

$$x : [s : t] \mapsto \left(a \cdot \frac{s^2 - t^2}{s^2 + t^2}, b \cdot \frac{2st}{s^2 + t^2} \right)$$

$$y : [u : v] \mapsto \left(\sqrt{a^2 - c^2} \cdot \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}, \sqrt{b^2 - c^2} \cdot \frac{2uv}{u^2 + v^2} \right)$$

Ici il n'y a pas d'ambiguïté comme touts les représentants d'un élément dans $\mathbb{CP}^1$ vont donner le même point dans $\mathbb{C}^2$. C'est aussi facile à voir que les images des deux fonctions sont contenues dans $E_0^{\mathbb{C}}$ et $E_c^{\mathbb{C}}$, respectivement.

Fixons $x = (x_1, x_2) \in E_0^{\mathbb{C}}$ et cherchons ses antécédents. $x_1 = a \iff t = 0$. Si $x_1 = a$, on a la seule solution $[s : t] = [1 : 0]$; sinon, on peut supposer $t = 1$, ensuite s^2 est déterminé par x_1. Il y a deux possibilités opposés pour x_2 avec x_1 fixé (ou une seule, $x_2 = 0$, si $x_1 = -a$) et aussi il y a deux possibiliés opposés pour s (ou une seule si $s^2 = 0$). Ces deux s déterminent deux x_2 différent, qui coïncident forcement avec ces deux, comme $x \in E_0^{\mathbb{C}}$. Alors $x : \mathbb{CP}^1 \to E_0^{\mathbb{C}}$ est une application bijective. Le même argument assure que $y : \mathbb{CP}^1 \to E_c^{\mathbb{C}}$ est bijective.

De plus, $s, t \in \mathbb{R} \iff x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, alors les restrictions

$$x : \left\{ [s, t] \in \mathbb{CP}^1 : [s : t] \text{ a un représentant avec } s, t \in \mathbb{R} \right\} \to E_0$$

$$y : \left\{ [u, v] \in \mathbb{CP}^1 : [u : v] \text{ a un représentant avec } u, v \in \mathbb{R} \right\} \to E_c$$

sont également bijectives.

On va utiliser ces paramétrisations des ellipses dans la suite.

Définissons $P : E_0 \times E_c \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x = (x_1, x_2) \in E_0, y = (y_1, y_2) \in E_c$: la droite sur x et y est tangente à E_c (dans y) ssi $P(x, y) = 0$:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \frac{y_1}{a^2 - c^2}(y_1 - x_1) + \frac{y_2}{b^2 - c^2}(y_2 - x_2) \\ &= 1 - \frac{x_1 y_1}{a^2 - c^2} - \frac{x_2 y_2}{b^2 - c^2} \end{aligned}$$

obtenu de l'équation de E_c et ses derivées partielles.

On étudiera la courbe

$$\Gamma = \{([s : t], [u : v] \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 : P(x, y) = 0\}$$

qui consiste aux paires des points projectivs correspondants aux tangentes à E_c, avec la paramétrisation ci-dessus. La forme de P utilisant s, t, u, v est

$$P = 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}} \cdot \frac{s^2 - t^2}{s^2 + t^2} \cdot \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} - \frac{b}{\sqrt{b^2 - c^2}} \cdot \frac{2st}{s^2 + t^2} \cdot \frac{2uv}{u^2 + v^2}$$

On introduit $P_1 = (s^2 + t^2)(u^2 + v^2)P$ qui est zéro ssi P lui-même égale à zéro.

$$P_1 = (s^2 + t^2)(u^2 + v^2) - \frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}}(s^2 - t^2)(u^2 - v^2) - \frac{b}{\sqrt{b^2 - c^2}} 4stuv.$$

C'est une fonction lisse, alors la courbe Γ est lisse aussi.

La projection $\Gamma \to \mathbb{CP}^1$, $(x, y) \mapsto x$ est un revêtement à deux feuillets : pour tout x fixé, il y a deux solutions pour y sauf quelques points de ramifications. Pour les chercher, écrivons P_1 comme une forme quadratique de u :

$$P_1 = \underbrace{\left(s^2 + t^2 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}}(s^2 - t^2)\right)}_{A} u^2 + \underbrace{\left(s^2 + t^2 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}}(s^2 - t^2)\right)}_{C} v^2 -$$

$$\underbrace{-\frac{b}{\sqrt{b^2 - c^2}} 4st}_{B} \cdot uv$$

On va distinguer deux cas selon x : $A = 0$ ou $A \neq 0$. Dans le premier cas, on a

$$0 = Buv + Cv^2$$

qui a exactement deux solutions $[u : v] \in \mathbb{CP}^1$: $[1 : 0]$ et $\left[\frac{C}{B} : -1\right]$.

Remarquons que $A = 0$ détermine une valeur positive pour la proportion $\frac{s^2}{t^2}$ parce que $\frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}} > 1$. Alors il y a deux points x pour lesquelles $A = 0$, aussi, $s, t \neq 0$ et $s, t \in \mathbb{R}$. De plus, si $([s : t], [1 : 0]) \in \Gamma$, donc forcement $A = 0$. Nous avons ainsi montrer qu'il y a exactement deux points dans Γ avec $v = 0$, nous les appellerons α_1 et α_2. Aussi il y a exactement deux points dans Γ avec $t = 0$, β_1 et β_2, qui de plus vérifient $s, u, v \neq 0$, parce que P_1 a une forme symétrique sur l'échange de x et y. Voir figure 2 concernant la position des α et β relative à E_0 et E_c.

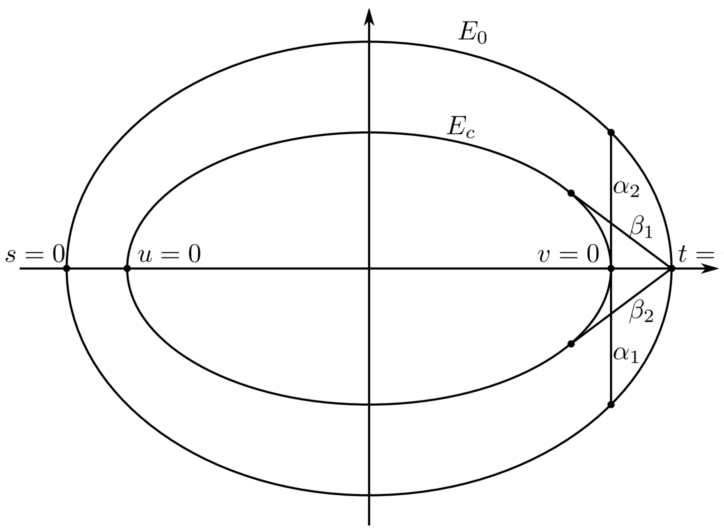

FIGURE 2 – Les ellipses E_0 et E_c avec les segments qui correspontent aux $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$.

Dans le deuxième cas, $A \neq 0$, on peut étudier sans perte de généralité le représentant avec $v = 1$ pour obtenir $P_1 = Au^2 + Bu + C$. Considérons le discriminant D de cette équation :

$$D = B^2 - 4AC = \underbrace{\left(\frac{16c^2}{b^2 - c^2} - \frac{8c^2}{a^2 - c^2}\right)}_{B'}(st)^2 + \underbrace{\frac{4c^2}{a^2 - c^2}}_{A'}(s^4 + t^4)$$

Comme $b^2 - c^2 < a^2 - c^2$, on a $A', B', B' - 2A' > 0$. Celui implique que $[s : t] = [0 : 1]$ ou $[1 : 0]$ ne sont pas des solutions de $D = 0$. Aussi, le discriminant $D' = B'^2 - 4A'^2$ de D vu comme une forme quadratique de s est strictement positif, l'équation $D = 0$ a quatre solutions distinctes dans $\mathbb{CP}^1$: $[s_1 : t_1]$, $[s_1 : -t_1]$, $[s_2 : t_2]$, $[s_2 : -t_2]$. Ceux sont exactement les quatre points de ramifications de la projection $\Gamma \to \mathbb{CP}^1, (x, y) \mapsto x$. A ses quatre points x, on a $D = 0$ alors il y a une seule solution possible pour y, mais pour tous les autres x, il y en a deux.

Comme le revêtement ramifie en quatre points, Γ doit être une courbe elliptique.

Rappelons qu'on a l'isomorphie topologique

$$E_0 \cong E_c \cong \big\{[s, t] \in \mathbb{CP}^1 : [s : t] \text{ a un représentant avec } s, t \in \mathbb{R}\big\} \cong \mathbb{RP}^1 \cong S^1,$$

alors on peut représenter $E_0 \times E_c \cong \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$ comme un tore. La restriction de Γ sur ce tore sera

$$\Gamma^{\mathbb{R}} := \{(x, y) \in E_0 \times E_c : P(x, y) = 0\}.$$

Remarquons que les points de ramification de $(x, y) \mapsto x$ ne correspondent pas aux points des $E_0 \times E_c$, parce que pour tout $x \in E_0$ il y a exactement deux y avec $P(x, y) = 0$. Aussi $\Gamma^{\mathbb{R}} \to E_c, (x, y) \mapsto y$ est un revêtement à deux feuillets sans ramifications. Figure 3 nous présent $\Gamma^{\mathbb{R}}$ sur le tore qui correspond à $E_0 \times E_c$. Remarquons que $\Gamma^{\mathbb{R}}$ n'est pas connexe, il y a deux types des $(x, y) \in E_0 \times E_c$ avec la droite xy soit tangente à E_c dans y ; il y a deux "directions". Les deux types des tangentes, les deux feuillets de Γ sont connecté dans les complexes aux points des ramifications.

Cette image de $\Gamma^{\mathbb{R}}$ n'est pas essentiel pour cet épreuve, elle ne nous aide qu'imaginer $\Gamma^{\mathbb{R}}$ et mieux comprendre α_i, β_i et f dans la suite. N'oublions pas que f est également définie pour Γ complexe.

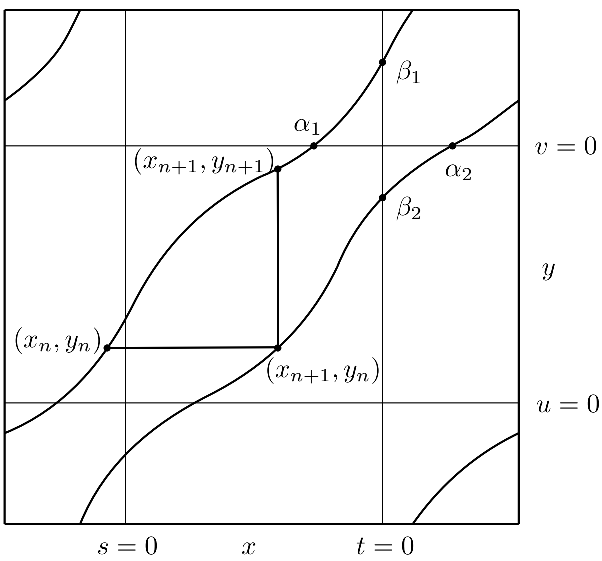

FIGURE 3 – $\Gamma^{\mathbb{R}}$ dans $E_0 \times E_c$. α_1 et β_1 sont dessinés sur le même feuillet, conforme à figure 2.

Soit $x_0, x_1, x_2, \ldots$ des points itérés sur E_0 comme décrits ci-dessus. Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, soit y_n le points de tangence à E_c de la droite $x_n x_{n+1}$. Alors on a $(x_n, y_n), (x_{n+1}, y_n) \in \Gamma$.

Partant de x_0, y_0 détermine la direction initiale. Considérons (x_0, y_0) comme notre état initial. Pour obtenir x_1, ou plutot (x_1, y_1), il faut trouver d'abord $x \neq x_0$ telle que $(x, y_0) \in \Gamma$, soit x_1. Après $y \neq y_0$ telle que $(x_1, y) \in \Gamma$, celui sera y_1. C'est claire que $x_p = x_0$ ssi $(x_p, y_p) = (x_0, y_0)$. On étudiera le comportement d'itération sur Γ partant de (x_0, y_0) au lieu d'étudier celui sur E_0 partant de x_0.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Considérons la fonction méromorphe $f : \Gamma \to \mathbb{C}$,

$$f(x, y) = f([s : t], [u : v]) := \frac{\frac{s_{n+1}}{t_{n+1}} - \frac{s}{t}}{\frac{u_n}{v_n} - \frac{u}{v}}$$

où $[s_{n+1} : t_{n+1}] = x_{n+1}$, $[u_n : v_n] = y_n$. C'est claire que f est une fonctions des points projectivs, son valeur ne dépend pas sur les représentants s, t ou u, v des points x et y.

Regardant figure 3 on peut penser à f comme la pente de la segment qui connecte (x_{n+1}, y_n) à (x, y). (x_n, y_n) est un zéro de f et (x_{n+1}, y_{n+1}) est un pôle de f.

Les points de Γ avec $v = 0$ sont des zéros aussi, et les points avec $t = 0$ sont des pôles. Il y a exactement deux points de chaque cas : α_1, α_2 et β_1, β_2 respectivement.

Par contre, (x_{n+1}, y_n) est ni zéro, ni pôle, comme $\Gamma^{\mathbb{R}}$ à ce point est ni horizontal, ni vertical. Sauf si $t_{n+1} = 0$ ou $v_n = 0$, quand (x_1, y_0) coïncide avec un β ou α, mais il n'ajoute pas à son multiplicité.

Alors f a trois zéros : (x_n, y_n), α_1, α_2 et trois pôles : (x_{n+1}, y_{n+1}), β_1 et β_2.

On utilse l'isomorphisme entre des courbes elliptiques et des tores : pour Γ donné, il existe un reseau Λ telle que

$$\Gamma \cong \mathbb{C}/\Lambda.$$

Alors on peut considérer (x_n, y_n), α_1, α_2, (x_{n+1}, y_{n+1}), β_1, β_2 comme des points sur cette reseau, et la fonction f comme une fonction méromorphe $\mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}$.

Le théorème d'Abel sur les position des zéros et des pôles dit que

$$\begin{aligned} (x_n, y_n) + \alpha_1 + \alpha_2 &\equiv (x_{n+1}, y_{n+1}) + \beta_1 + \beta_2 \pmod{\Lambda} \\ (x_{n+1}, y_{n+1}) - (x_n, y_n) &\equiv \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2}_{\Xi} \pmod{\Lambda} \end{aligned}$$

Notons que a, b, c déterminent Γ, Λ et Ξ, indépendantement de x_0, y_0. Alors l'itération sur le tore peut être représenté par une translation par Ξ. Donc

$$p = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : n \cdot \Xi \in \Lambda\}$$

qui est bien indépendante de notre choix de l'état initiale. Notons que $p = \infty \iff \Xi \notin \mathbb{Q}\Lambda$ qui corresponde au cas non-périodique.

□

6 Conclusion

En fait, il y a alors trois sorte de trajectoire d'une bille dans une ellipse :

- Si une corde n'intersecte pas le segment qui connecte les deux foyers, la trajectoire ne l'intersectera jamais. Toutes les cordes seront tangentes à la même ellipse homofocale. La trajectiore peut être périodique ou non, et la période est déterminée par les deux ellipses, elle est la même pour toutes les trajectoires.
- Si une corde contient une foyer, les cordes de la trajectoire traverseront alternativement les deux foyer. C'est une propriété fondamentale des ellipses. On n'a pas étudié périodicité dans ce cas.

– Si une corde intersecte le segment qui connecte les deux foyers, toutes les cordes l'intersecteront. C'est une conséquence d'inversibilité de la trajectoire et la première propriété. En fait, on peut montrer que toute corde sera tangente à une hyperbole homofocale, et le théorème de Poncelet restera vrai : la période est déterminée par les deux coniques.

Références

[1] Cours de Dominique Cerveau

[2] P. Griffiths, J. Harris : On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism. Enseign. Math. (2) 24 (1978), no. 1–2, pp. 31–40.